

1

κεφάλαιο

Ηλεκτρικό Πεδίο - Νόμοι & Βασικά Μεγέθη

Η λέξη “ηλεκτρισμός” συνήθως μας μεταφέρει σε εικόνες που αναφέρονται στη σύγχρονη τεχνολογία, όπως φώς και ηλεκτρική ενέργεια, κινητήρες, ηλεκτρονικά κυκλώματα και συσκευές, υπολογιστές. Αλλά οι ηλεκτρικές δυνάμεις παίζουν ακόμα πιο σημαντικό ρόλο στη ζωή μας. Σύμφωνα με την ατομική θεωρία, οι ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων και των μορίων είναι υπεύθυνες για τη συγκρότηση της ύλης και των σχηματισμό των υγρών και των στερεών. Οι ηλεκτρικές δυνάμεις υπεισέρχονται επίσης στις διαδικασίες του μεταβολισμού στο ανθρώπινο σώμα. Επομένως, η μελέτη τους αποτελεί βασικό κεφάλαιο στη σύγχρονη φυσική.

Ο **ηλεκτρισμός** είναι το γνωστικό πεδίο της Φυσικής, το οποίο ασχολείται με τη μελέτη των φαινομένων, που δημιουργούνται από την ύπαρξη και την αλληλεπίδραση ηλεκτρικών φορτίων. Τα ηλεκτρικά φορτία διακρίνονται σε θετικά και αρνητικά, σύμφωνα με τον ορισμό του Benjamin Franklin (1706-1790).

Όταν τα φορτία, τα οποία μελετούμε, είναι ακίνητα ή κινούνται με πάρα πολύ μικρές ταχύτητες, το αντίστοιχο γνωστικό πεδίο ονομάζεται **ηλεκτροστατική**.

1.1. Νόμος του Coulomb

Η ποσοτική μελέτη των φαινομένων έλξης και άπωσης μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων οδήγησε στη διατύπωση ενός νόμου από τον Augustin de Coulomb (1785), ο οποίος είναι αντίστοιχος με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Newton.

Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb, δύο **σημειακά** φορτία q_1 και q_2 , τα οποία απέχουν απόσταση r_{12} , ασκούν το ένα στο άλλο ηλεκτρική δύναμη, η οποία είναι ανάλογη των δύο φορτίων και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης. Η δύναμη αυτή ονομάζεται **δύναμη Coulomb**.

Η δύναμη Coulomb είναι διανυσματικό μέγεθος με διεύθυνση τη διεύθυνση της ευθείας, η οποία ενώνει τα δύο φορτία. Η διανυσματική της έκφραση δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F}_{12} = k_{\eta\lambda} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{e}_{12} \quad (1-1)$$

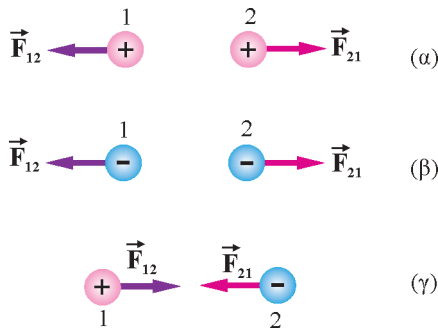
όπου \vec{F}_{12} είναι η δύναμη που ασκείται από το φορτίο q_1 στο φορτίο q_2 και \hat{e}_{12} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, που κείται πάνω στην r_{12} και έχει φορά από το φορτίο q_1 στο φορτίο q_2 . Στο διεθνές σύστημα (SI) η μονάδα του φορτίου ονομάζεται Coulomb και το σύμβολό της είναι το C. Η σταθερά αναλογίας $k_{\eta\lambda}$ εξαρτάται από το σύστημα μονάδων. Στο διεθνές σύστημα (SI) ισούται με

$$k_{\eta\lambda} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cong 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (1-2)$$

Η ακρίβεια του νόμου του Coulomb έχει ελεγχθεί με σύγχρονα πειράματα μεγάλης ακρίβειας. Διαπιστώθηκε, ότι ο εκθέτης της απόστασης των φορτίων που αλληλεπιδρούν είναι ακριβής με απόκλιση $\pm 1 \times 10^{-16}$.

Εάν τα φορτία q_1 και q_2 είναι ομόσημα, τότε το γινόμενο τους είναι θετικό και η δύναμη \vec{F}_{12} έχει την ίδια φορά με το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{e}_{12} , οπότε τείνει να απομακρύνει το φορτίο. Η δύναμη Coulomb στην περίπτωση αυτή είναι **απωστική**, σχ.1(α) και 1(β).

Εάν τα φορτία q_1 και q_2 είναι ετερόσημα, τότε το γινόμενο τους είναι αρνητικό και η δύναμη \vec{F}_{12} έχει αντίθετη φορά από το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{e}_{12} , οπότε τείνει να φέρει το φορτίο q_2 προς τη θέση του φορτίου q_1 . Η δύναμη Coulomb στην περίπτωση αυτή είναι **ελκτική**, σχ.1(γ).



Σχήμα 1.1

Αν υπάρχουν περισσότερα από δύο σημειακά φορτία, η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα ορισμένο φορτίο q_0 από τα υπόλοιπα q_i , των οποίων

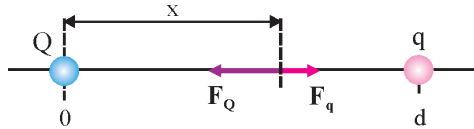
το πλήθος έστω ότι είναι N , προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο φορτίο q_0 , οπότε θα δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i0}^2} \hat{e}_{i0} \quad (1-3)$$

όπου $r_{i0} = |\vec{r}_{i0}|$ είναι η απόσταση μεταξύ του φορτίου q_i και του φορτίου q_0 , ενώ \hat{e}_{i0} είναι το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα της \vec{r}_{i0} με φορά από το q_i στο q_0 . Η σχέση (1-3) αποτελεί έκφραση της *αρχής της επαλληλίας*.

Παράδειγμα 1.1

Ένα σημειακό φορτίο $Q = -3.6 \times 10^{-4}$ C βρίσκεται σε απόσταση 0.45 m από σημειακό φορτίο $q = 8.3 \times 10^{-4}$ C. Σε ποια θέση κατά μήκος της ευθείας που διέρχεται από τα φορτία η δύναμη που ασκείται σε φορτίο q' είναι ίση με μηδέν;



Σχήμα 1.2

Λύση

Κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο φορτία η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q' από το φορτίο Q είναι αντίθετη στη δύναμη που ασκείται από το φορτίο q . Για να είναι μηδέν η δύναμη πάνω στο φορτίο q' θα πρέπει:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'Q}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{(d-x)^2} \Rightarrow$$

$$Q(d-x)^2 = qx^2 \Rightarrow Q(d^2 - 2dx + x^2) - qx^2 = 0$$

και τελικά

$$(Q-q)x^2 - 2dQx + Qd^2 = 0$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτουν οι λύσεις:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2Qd \pm \sqrt{(-2Qd)^2 - 4(Q-q)(Qd^2)}}{2(Q-q)} = \\ &= \frac{2Qd \pm \sqrt{4Q^2d^2 - 4Q^2d + 4qQd^2}}{2(Q-q)} = \frac{Qd \pm \sqrt{qQd}}{(Q-q)} \end{aligned}$$

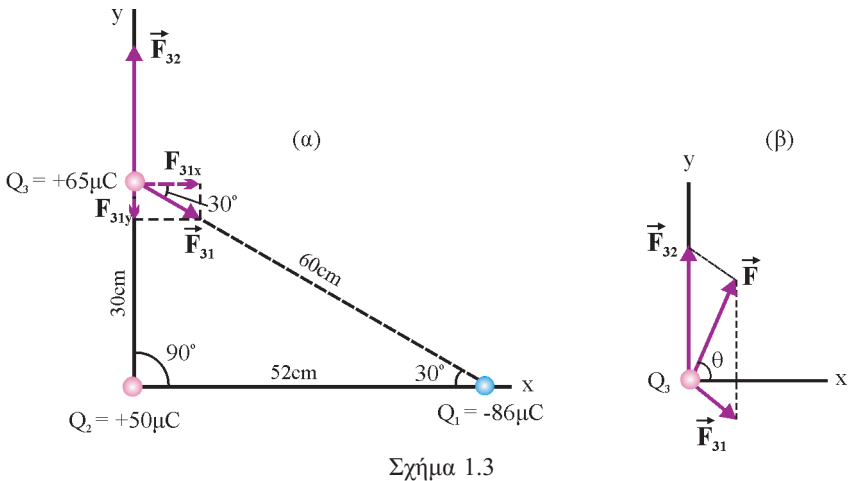
Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$x_1 = -0.87 \text{ m και } x_2 = 0.18 \text{ m}$$

Η πρώτη λύση απορρίπτεται γιατί στη θέση αυτή το μέτρο των δυνάμεων είναι ίσο, αλλά η διεύθυνσή τους είναι ίδια. Η θέση στην οποία η δύναμη που ασκείται σε φορτίο q' είναι ίση με μηδέν βρίσκεται στη θέση $x_2 = 0.18 \text{ m}$.

Παράδειγμα 1.2

Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο φορτίο Q_3 του σχ.1.3 από τα φορτία Q_1 και Q_2 .



Σχήμα 1.3

Λύση

Όπως φαίνεται στο σχ.1.3 η δύναμη \vec{F}_{32} είναι απωστική, ενώ η δύναμη \vec{F}_{31} είναι ελκτική. Για το μέτρο της κάθε δύναμης ισχύει:

$$F_{31} = k \frac{Q_3 Q_1}{r_{31}^2} = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(6.5 \times 10^{-5} \text{ C})(8.6 \times 10^{-5} \text{ C})}{(0.60 \text{ m})^2} = 140 \text{ N}$$

$$F_{32} = k \frac{Q_3 Q_2}{r_{32}^2} = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(6.5 \times 10^{-5} \text{ C})(5.0 \times 10^{-5} \text{ C})}{(0.30 \text{ m})^2} = 330 \text{ N}$$

Η δύναμη \vec{F}_{32} έχει συνιστώσα μόνον κατά τον άξονα y , $\vec{F}_{32} = F_{32y} \hat{e}_y$.

Αναλύουμε την δύναμη \vec{F}_{31} σε συνιστώσες κατά τους άξονες x και y . Είναι

$$\vec{F}_{31} = F_{31x} \hat{e}_x - F_{31y} \hat{e}_y$$

όπου

$$F_{31x} = F_{31} \cos 30^\circ = (140 \text{ N}) \cos 30^\circ = 120 \text{ N}$$

$$F_{31y} = F_{31} \sin 30^\circ = (140 \text{ N}) \sin 30^\circ = 70 \text{ N}$$

Οι συνιστώσες της δύναμης \vec{F} που ασκείται στο φορτίο Q_3 θα είναι

$$F_x = F_{31x} = 120 \text{ N}$$

$$F_y = F_{32y} - F_{31y} = 330 - 70 = 260 \text{ N}$$

Για το μέτρο και τη διεύθυνση της δύναμης \vec{F} ισχύει

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(120 \text{ N})^2 + (260 \text{ N})^2} = 290 \text{ N}$$

$$\tan \theta = \frac{F_x}{F_y} = \frac{260 \text{ N}}{120 \text{ N}} = 2.2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2.2) = 65^\circ$$

Παράδειγμα 1.3.

Για να αποκτήσουμε την αίσθηση του μεγέθους των ηλεκτρικών δυνάμεων σε ατομικό επίπεδο, θα υπολογίσουμε το μέτρο της ελκτικής ηλεκτρικής δύναμης ανάμεσα σε έναν πυρήνα ατόμου σιδήρου, ο οποίος έχει φορτίο $q_{Fe} = 26q_p$, όπου q_p το φορτίο του πρωτονίου, και στο εσώτερο ηλεκτρόνιο του, που έχει φορτίο q_e αν η μεταξύ τους απόσταση είναι $1.5 \times 10^{-12} \text{ m}$.

Λύση

Είναι $q_p = -q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$. Η δύναμη Coulomb μεταξύ πυρήνα και ηλεκτρονίου θα έχει μέτρο

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e q_{Fe}}{r^2} = (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) \frac{(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(26 \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ C})}{(1.5 \times 10^{-12} \text{ m})^2}$$

και τελικά

$$F = 2.7 \times 10^{-3} \text{ N}$$

1.2. Ένταση ηλεκτρικού πεδίου σημειακών φορτίων

Το οποιοδήποτε μεμονωμένο σημειακό φορτίο ή κατανομή σημειακών φορτίων ή συνεχής κατανομή φορτίου δημιουργεί ένα πεδίο ηλεκτροστατικών δυνάμεων. Αν στο πεδίο αυτό εισέλθει φορτίο Q , τότε θα δεχθεί δύναμη Coulomb $\vec{F} = \vec{E}Q$. Ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ δύναμης Coulomb και φορτίου είναι ένα διανυσματικό μέγεθος \vec{E} , που χαρακτηρίζει το πεδίο, η γνώση του οποίου μας επιτρέπει τον υπολογισμό των δυνάμεων Coulomb. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται *ένταση* του ηλεκτροστατικού πεδίου.

Η είσοδος του Q στο πεδίο συνεισφέρει μια επιπλέον συνιστώσα \vec{E}_Q . Για να ορίσουμε την ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου από την εξ.(1), θα πρέπει η συνιστώσα αυτή να είναι $\vec{E}_Q \ll \vec{E}$, ώστε $\vec{E} + \vec{E}_Q \cong \vec{E}$. Αυτό συμβαίνει, όταν $Q \rightarrow 0$. Επομένως, ο μαθηματικός ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από την εξ.(1-4)

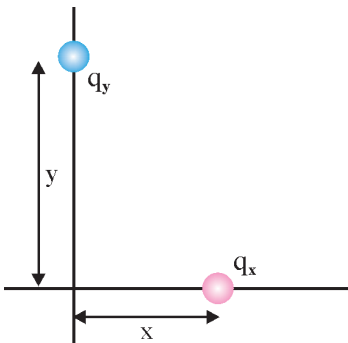
$$\vec{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q} \quad (1-4)$$

Η ένταση του πεδίου σημειακού φορτίου q είναι

$$\vec{E} = K_{\eta\lambda} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r \quad (1-5)$$

Παράδειγμα 1.4

Ένα φορτίο $q_x = 2.17 \mu\text{C}$ βρίσκεται κατά μήκος του άξονα x σε απόσταση $r_x = 0.345 \text{ m}$ από την αρχή των αξόνων. Ένα φορτίο $q_y = -4.21 \mu\text{C}$ βρίσκεται κατά μήκος του άξονα y σε απόσταση $r_y = 0.576 \text{ m}$ από την αρχή των αξόνων. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων.



Σχήμα 1.4

Λύση

Η ένταση του ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων είναι το διανυσματικό άθροισμα των εντάσεων του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλονται στο φορτίο q_x και στο φορτίο q_y . Για να ορίσουμε τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στην αρχή των αξόνων, αρκεί να ορίσουμε την διεύθυνση κατά την οποία θα κινηθεί ένα δοκιμαστικό θετικό σημειακό φορτίο, που είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων.

Το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}_{qx} που οφείλεται στο φορτίο q_x είναι

$$\vec{E}_{qx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_x}{r_x^2} (-\hat{e}_x) = (9.0 \times 10^9) \frac{(2.17 \times 10^{-6})}{(0.345)^2} (-\hat{e}_x) = -1.64 \times 10^5 \hat{e}_x \text{ N/C}$$

ενώ αυτό που οφείλεται στο φορτίο q_y είναι

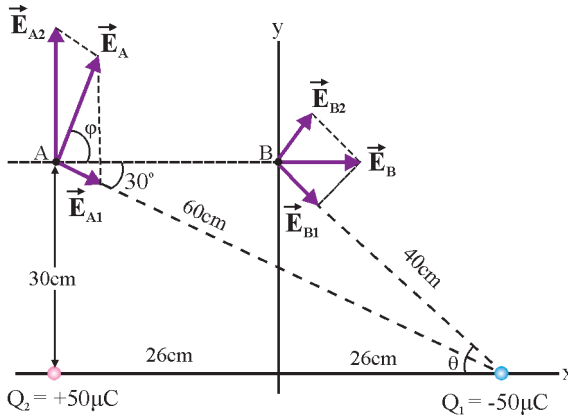
$$\vec{E}_{qy} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_y}{r_y^2} (-\hat{e}_y) = (9.0 \times 10^9) \frac{(-4.21 \times 10^{-6})}{(0.576)^2} (-\hat{e}_y) = 1.14 \times 10^5 \hat{e}_y \text{ N/C}$$

Η ολική ένταση του πεδίου στην αρχή των αξόνων θα είναι

$$\vec{E} = \vec{E}_{qx} + \vec{E}_{qy} = -1.64 \times 10^5 \hat{e}_x + 1.14 \times 10^5 \hat{e}_y \text{ N/C}$$

Παράδειγμα 1.5

Να υπολογιστεί η συνολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία A και B του σχ.1.5 που οφείλεται στα φορτία Q_1 και Q_2 , $Q_1 = -Q_2 = 50 \mu\text{C}$. Στο διάγραμμα του σχ.1.5 δίνονται όλα τα απαραίτητα στοιχεία.



Σχήμα 1.5

Λύση

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο A θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των εντάσεων \vec{E}_{A1} , που οφείλεται στο φορτίο Q_1 , και \vec{E}_{A2} , που οφείλεται στο φορτίο Q_2 . Αντίστοιχα, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο B θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των εντάσεων \vec{E}_{B1} , που οφείλεται στο φορτίο Q_1 , και \vec{E}_{B2} , που οφείλεται στο φορτίο Q_2 .

α) Το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο A (όπως και στο σημείο B) που οφείλεται σε κάθε ένα από τα φορτία Q_1 και Q_2 δίνεται από τη γενική σχέση $E = k_{\eta\lambda} Q/r^2$, οπότε

$$E_{A1} = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(50 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.60 \text{ m})^2} = 1.25 \times 10^6 \text{ N/C}$$

$$E_{A2} = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(50 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.30 \text{ m})^2} = 5.0 \times 10^6 \text{ N/C}$$

Η διεύθυνση των συνιστωσών των διανυσμάτων \vec{E}_{A1} και \vec{E}_{A2} δίνεται στο σχ.1.5. Το διάνυσμα \vec{E} της ολικής έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο A έχει ως προς τους άξονες x και y τις ακόλουθες συνιστώσες:

$$E_{Ax} = E_{A1} \cos 30^\circ = 1.1 \times 10^6 \text{ N/C}$$

$$E_{Ay} = E_{A2} - E_{A1} \sin 30^\circ = 4.4 \times 10^6 \text{ N/C}$$

Για το μέτρο και τη διεύθυνση της \vec{E}_A ισχύει:

$$E_A = \sqrt{E_{Ax}^2 + E_{Ay}^2} = \sqrt{(1.1)^2 + (4.4)^2} \times 10^6 = 4.5 \times 10^6 \text{ N/C}$$

και

$$\tan \varphi = \frac{E_{Ay}}{E_{Ax}} = \frac{1.1}{4.4} = 4.0 \Rightarrow \varphi = 76^\circ$$

β) Το σημείο B ισαπέχει από τα φορτία Q_1 και Q_2 . Έτσι τα μέτρα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου E_{B1} και E_{B2} στο σημείο B είναι ίσα:

$$E_{B1} = E_{B2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(50 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.40 \text{ m})^2} = 2.8 \times 10^6 \text{ N/C}$$

Λόγω συμμετρίας οι y συνιστώσες είναι ίσες και αντίθετες και αλληλοαναιρούνται. Άρα η διεύθυνση της ολικής έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E}_B θα είναι παράλληλη προς τον άξονα x και το μέτρο της θα είναι

$$E_B = E_{B1} \cos \theta + E_{B2} \cos \theta = 2E_{B1} \cos \theta \quad (\text{Π1.5-1})$$

Από το διάγραμμα του σχ.1.4 προκύπτει ότι $\cos \theta = \frac{26 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = 0.65$, οπότε

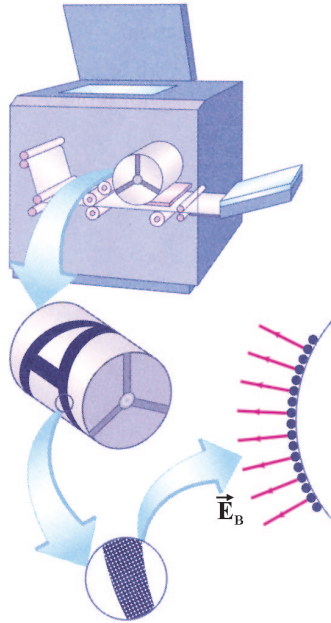
αντικαθιστώντας στην εξ.(Π1.5-1) παίρνουμε το μέτρο της \vec{E}_B ,

$$E_B = 2(2.8 \times 10^6 \text{ N/C})(0.65) = 3.6 \times 10^6 \text{ N/C}$$

που έχει κατεύθυνση κατά τα θετικά του άξονα x.

Παράδειγμα 1.6

Η λειτουργία ενός φωτοτυπικού μηχανήματος στηρίζεται στην έλξη θετικών φορτίων από την επιφάνεια ενός τυμπάνου, ώστε να σχηματίζεται το είδωλο της υπό εκτύπωση εικόνας, και ακολούθως στη διασπορά αρνητικά φορτισμένων σωματιδίων ξηρής μελάνης στην ίδια επιφάνεια. Τα σωματίδια αυτά επικαλύπτουν το αρνητικά φορτισμένο είδωλο της εικόνας και ακολούθως μεταφέρονται στο χαρτί για την παραγωγή του αντιγράφου. Αν υποθέσουμε ότι κάθε σωματίδιο μελάνης έχει μάζα $9.0 \times 10^{-16} \text{ kg}$ και φέρει στατικό φορτίο 20 ηλεκτρονίων και ότι η ηλεκτρική δύναμη πάνω στο σωματίδιο πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από το βάρος του για να εξασφαλισθεί η έλξη, να υπολογιστεί η απαραίτητη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια του τυμπάνου.



Σχήμα 1.6 Φωτοτυπικό μηχάνημα

Λύση

Η ηλεκτρική δύναμη που θα ασκηθεί σε ένα σωματίδιο μελάνης, που φέρει φορτίο $q = 20e$ είναι $F = qE$, όπου E είναι το απαραίτητο ηλεκτρικό πεδίο. Η δύναμη αυτή πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από το βάρος του σωματιδίου, άρα η ελάχιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου θα ικανοποιεί τη σχέση

$$qE = 2mg$$

όπου $q = 20e$. Επομένως,

$$E = \frac{2mg}{q} = \frac{2(9.0 \times 10^{-16} \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{20(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})} = 5.5 \times 10^3 \text{ N/C}$$

1.3. Το ηλεκτρικό πεδίο συνεχών κατανομών φορτίων

Σε πολλές περιπτώσεις υπάρχουν τόσα πολλά φορτία, ώστε να είναι αδύνατον να αθροιστούν οι εντάσεις του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από κάθε ένα φορτίο. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή των φορτίων αντιμετωπίζεται ως συνεχής κατανομή πυκνότητας φορτίου. Για κάθε στοιχειώδες φορτίο dq της κατανομής των φορτίων, που περιέχεται σε όγκο $d\tau$, υπάρχει μια στοιχειώδης συνεισφορά στο ηλεκτρικό πεδίο, $d\vec{E}$, που δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{e}_r \quad (1-6)$$

όπου r η απόσταση από το στοιχειώδες φορτίο μέχρι το σημείο, όπου υπολογίζεται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και \hat{e}_r το μοναδιαίο διάνυσμα. Για τον υπολογισμό της ολικής έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο καθορισμένο σημείο ισχύει:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{e}_r \quad (1-7)$$

Η κατανομή φορτίων σε πολλές περιπτώσεις είναι μια γνωστή συνάρτηση θέσης, π.χ.:

$dq = \lambda dl$, όπου λ η γραμμική πυκνότητα φορτίων (φορτίο ανά μονάδα μήκους)

$dq = \sigma dS$, όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίων (φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας)

$dq = \rho d\tau$, όπου ρ η πυκνότητα όγκου φορτίων (φορτίο ανά μονάδα όγκου)

Παράδειγμα 1.7

Μια γραμμική πυκνότητα φορτίου μήκους L βρίσκεται κατά μήκος του άξονα x ανάμεσα στα σημεία $x = 0$ και $x = L$. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου ως συνάρτηση της θέσης δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x^2}{L^2}, \quad \lambda_0 > 0$$

Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στην κατανομή κατά μήκος του άξονα x , για όλα τα $x > L$.

Λύση

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα της κατανομής φορτίου στο σημείο x_a με μήκος dx_a . Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο P , με συντεταγμένη

$x > L$, εξ αιτίας του στοιχειώδους αυτού τμήματος της κατανομής θα είναι

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(x_a)dx_a}{(x-x_a)^2} \hat{e}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 x_a^2 dx_a}{L^2 (x-x_a)^2} \hat{e}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L^2} \frac{x_a^2 dx_a}{(x-x_a)^2} \hat{e}_x$$

Η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει με ολοκλήρωση για όλη την περιοχή όπου η κατανομή φορτίων είναι διάφορη του μηδενός.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L^2} \int_0^L \frac{x_a^2 dx_a}{(x-x_a)^2} \hat{e}_x$$

Για την απλοποίηση του ολοκληρώματος κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, $u = x - x_a$ και $du = -dx_a$, οπότε

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L^2} \int_{x-L}^x \frac{(x-u)^2}{u^2} du = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L^2} \int_{x-L}^x \left(\frac{x^2}{u^2} - 2\frac{x}{u} + 1 \right) du$$

Το ολοκλήρωμα αποτελείται από τρία επιμέρους ολοκληρώματα, δηλαδή

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L^2} \left\{ x^2 \int_{x-L}^x \frac{du}{u^2} - 2x \int_{x-L}^x \frac{du}{u} + \int_{x-L}^x du \right\}$$

και μετά τις επιμέρους ολοκληρώσεις,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L^2} \left\{ x^2 \left[-\frac{1}{u} \right]_{x-L}^x - 2x [\ln u]_{x-L}^x + [u]_{x-L}^x \right\}$$

οπότε

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L^2} \left\{ x^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-L} \right) - 2x [\ln x - \ln(x-L)] + [x - (x-L)] \right\}$$

και τελικά

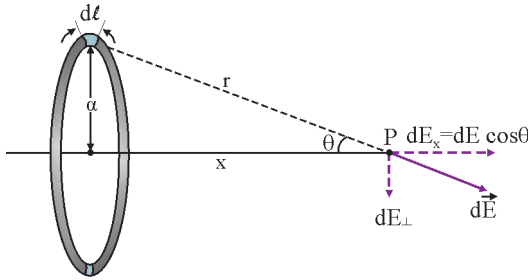
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L^2} \left\{ \frac{x^2}{x-L} - x - 2x \ln \left(\frac{x}{x-L} \right) + L \right\} \hat{e}_x$$

ή

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L^2} \left\{ \frac{xL}{x-L} - 2x \ln \left(\frac{x}{x-L} \right) + L \right\} \hat{e}_x$$

Παράδειγμα 1.8

Ένα λεπτό δακτυλιοειδές αντικείμενο ακτίνας a φέρει συνολικό φορτίο $+Q$ ομοιόμορφα κατανεμημένο με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ . Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο P που βρίσκεται στον άξονά του και σε απόσταση x από το κέντρο.



Σχήμα 1.7

Ανάλυση

Στο σχ.1.7 φαίνεται η διεύθυνση του διανύσματος $d\vec{E}$ του στοιχειώδους ηλεκτρικού πεδίου, που οφείλεται στο στοιχειώδες φορτίο dQ που φέρει το στοιχειώδες τμήμα $d\ell$ του δακτυλίου. Το μέτρο του $d\vec{E}$ είναι

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \quad (\text{Π1.8-1})$$

όπου $dQ = Q\left(\frac{d\ell}{2\pi a}\right) = \lambda d\ell$, οπότε η εξ. (Π1.8-1) γράφεται

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{r^2}$$

Αναλύουμε το διάνυσμα $d\vec{E}$ σε δύο συνιστώσες, την κάθετη dE_{\perp} και την παράλληλη dE_x ως προς τον άξονα x . Για κάθε κάθετη συνιστώσα που αντιστοιχεί σε ένα στοιχειώδες τμήμα $d\ell$ υπάρχει μια ίση και αντίθετη που οφείλεται στο ίσο φορτίο που φέρει το αντιδιαμετρικό στοιχείο $d\ell'$. Έτσι, για λόγους συμμετρίας η κάθετη συνιστώσα του \vec{E} θα είναι μηδέν. Τελικά το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P θα είναι

$$E = E_x = \int dE \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\cos \theta d\ell}{x^2 + a^2} \quad (\text{Π1.8-2})$$

Αλλά $\cos \theta = x/r$, όπου $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$, οπότε η εξ.(Π1.8-2) γράφεται

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{x}{(x^2 + \alpha^2)^{3/2}} d\ell$$

και επειδή η ολοκλήρωση γίνεται σε σταθερή απόσταση x

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi\alpha} d\ell = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + \alpha^2)^{3/2}} (2\pi\alpha)$$

και τελικά

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \hat{e}_x \quad (\text{Π1.8-3})$$

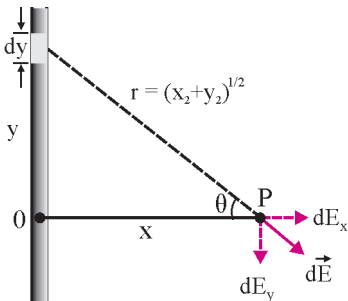
Σημείωση: για μεγάλη απόσταση $x \gg \alpha$ η εξ.(Π1.8-3) γίνεται

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \hat{e}_x$$

Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς από μεγάλη απόσταση ο δακτύλιος φαίνεται σαν σημειακό φορτίο. Επίσης, στο κέντρο του δακτυλίου, όπου $x = 0$, θα είναι και $E = 0$, καθώς, όπως σημειώθηκε προηγουμένως, όλες οι συνιστώσες οι κάθετες στον άξονα x είναι μηδέν και η συνιστώσα E_x είναι επίσης μηδέν στο κέντρο του κύκλου.

Παράδειγμα 1.9

Να βρεθεί το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το μέσο O μιας ομογενούς γραμμικής κατανομής φορτίου λ (C/m) πολύ μεγάλου μήκους (σχ.1.8). Η απόσταση x είναι πολύ μικρότερη από το μήκος της κατανομής.



Σχήμα 1.8

Ανάλυση

Ένα στοιχειώδες τμήμα της κατανομής dy φέρει φορτίο $dQ = \lambda dy$. Το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P που οφείλεται σε αυτό το φορτίο είναι:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{(x^2 + y^2)}$$

Το διάνυσμα $d\vec{E}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες, dE_x και dE_y , όπου

$$dE_x = dE \cos \theta \quad \text{και} \quad dE_y = dE \sin \theta$$

Λόγω συμμετρίας η y συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι μηδέν, καθώς για κάθε συνιστώσα dE_y που οφείλεται στο στοιχειώδες φορτίο του τμήματος dy που βρίσκεται πάνω από το 0 υπάρχει μια ίση και αντίθετη που οφείλεται στο αντίστοιχο στοιχείο dy' που βρίσκεται κάτω από το 0. Οπότε

$$E = E_x = \int dE \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\cos \theta dy}{x^2 + y^2} \quad (\text{Π1.9-1})$$

Θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, χρησιμοποιώντας τη γωνία θ ως τη νέα μεταβλητή. Θα είναι

$$y = x \tan \theta \quad \text{οπότε} \quad dy = x d\theta / \cos^2 \theta$$

και επειδή

$$\cos \theta = x / r$$

προκύπτει

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{\cos^2 \theta}{x^2}$$

Με αντικατάσταση στην εξ.(Π1.9-1) προκύπτει

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x}$$

και σε διανυσματική μορφή

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \hat{e}_x \quad (\text{Π1.9-2})$$

Παράδειγμα 1.10

Μια ομογενής γραμμική κατανομή φορτίου πυκνότητας λ βρίσκεται κατά μήκος του άξονα x από $x = -\infty$ έως $x = +\infty$. Μια όμοια ομογενής γραμμική κατανομή φορτίου, πυκνότητας επίσης λ , βρίσκεται κατά μήκος του άξονα y από $y = -\infty$ έως $y = +\infty$. Να προσδιοριστεί η ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου σε ένα σημείο (x, y) του πρώτου τεταρτημορίου του επιπέδου xy .

Ανάλυση

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι για μια γραμμική κατανομή φορτίου πυκνότητας λ κατά μήκος του άξονα y η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται

από τη σχέση:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \hat{e}_x$$

Λόγω συμμετρίας, για μια γραμμική κατανομή φορτίου πυκνότητας λ κατά μήκος του άξονα x η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα δίνεται από τη σχέση

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \hat{e}_y$$

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο επίπεδο (x,y) θα είναι:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \hat{e}_x + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \hat{e}_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} \hat{e}_x + \frac{1}{y} \hat{e}_y \right)$$

Το μέτρο της \vec{E} θα είναι

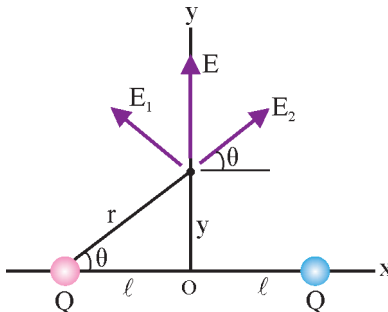
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}},$$

ενώ θα σχηματίζει με τον άξονα x γωνία θ ίση με

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y}}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x}} = \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

Παράδειγμα 1.11

Δύο ίσα φορτία Q βρίσκονται στα σημεία $(x=\ell, y=0)$ και $(x=-\ell, y=0)$. Να βρεθεί (α) η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση του y κατά μήκος του άξονα y , (β) ναδειχθεί ότι το πεδίο γίνεται μέγιστο στο σημείο $y = \pm\ell/\sqrt{2}$.



Σχήμα 1.9

Λύση

(α) Επειδή τα δύο φορτία ισαπέχουν από τον άξονα y , σε κάθε σημείο του άξονα αυτού η ένταση του πεδίου που δημιουργούν θα έχει το ίδιο μέτρο. Αν αναλύσουμε τα διανύσματα της έντασης ως προς τους άξονες x και y , οι συνιστώσες οι παράλληλες ως προς τον άξονα x αλληλοαναιρούνται, οπότε μένουν οι συνιστώσες ως προς τον άξονα y , οι οποίες έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια φορά. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο κατά μήκος του άξονα y θα είναι λοιπόν,

$$\vec{E} = E_y \hat{e}_y = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(\ell^2 + y^2)} \sin\theta \hat{e}_y = \frac{Qy}{2\pi\epsilon_0(\ell^2 + y^2)^{3/2}} \hat{e}_y$$

(β) Για να βρεθεί σε ποιο σημείο η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου γίνεται μέγιστη, θέτουμε την πρώτη παράγωγο του E ως προς y ίση με μηδέν και λύνουμε ως προς y . Είναι

$$E = \frac{Qy}{2\pi\epsilon_0(\ell^2 + y^2)^{3/2}}$$

και

$$\frac{dE}{dy} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\ell^2 + y^2)^{3/2}} + \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{Qy}{2\pi\epsilon_0(\ell^2 + y^2)^{5/2}} (2y) = 0$$

οπότε

$$\frac{1}{(\ell^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{3y^2}{(\ell^2 + y^2)^{5/2}} \quad \text{ή} \quad \frac{3y^2}{\ell^2 + y^2} = 1 \quad \text{ή} \quad 2y^2 = \ell^2$$

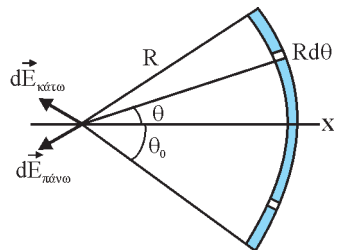
και τελικά η ένταση του πεδίου γίνεται μέγιστη στα σημεία y_m του άξονα y με συντεταγμένες

$$y_m = \pm \ell / \sqrt{2}$$

Είναι προφανές ότι το πεδίο γίνεται ελάχιστο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, όπου παίρνει μηδενική τιμή.

Παράδειγμα 1.12

Δίνεται μία ομογενής γραμμική κατανομή φορτίου πυκνότητας λ , $\lambda > 0$, σε σχήμα τόξου κύκλου, που έχει κέντρο O και ακτίνα ίση με R , όπως φαίνεται στο σχ.1.10. Το κυκλικό τόξο φαίνεται από το O υπό γωνία $2\theta_0$, συμμετρική ως προς τον άξονα x , όπως φαίνεται στο σχ.1.10.



Σχήμα 1.10

Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} στο σημείο 0.

Ανάλυση

Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα του τόξου που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x . Το μήκος του είναι $Rd\theta$ και το φορτίο του $dq = \lambda Rd\theta$. Το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το στοιχειώδες τόξο είναι:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda Rd\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{R}$$

Αν θεωρήσουμε στοιχειώδη τόξα που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x θα διαπιστώσουμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα έχει μόνον x συνιστώσα. Λόγω συμμετρίας η κάθετη συνιστώσα y είναι μηδέν, καθώς οι αντίστοιχες συνιστώσες της έντασης ηλεκτρικού πεδίου που παράγονται από τα δύο συμμετρικά στοιχειώδη τόξα είναι ίσες και αντίθετες. Επομένως θα είναι

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{R} \cos\theta$$

και ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta d\theta}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\theta d\theta = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} [\sin\theta_0 - \sin(-\theta_0)] = \frac{2\lambda \sin\theta_0}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

και τελικά

$$E_x = \frac{\lambda \sin\theta_0}{2\pi\epsilon_0 R}$$

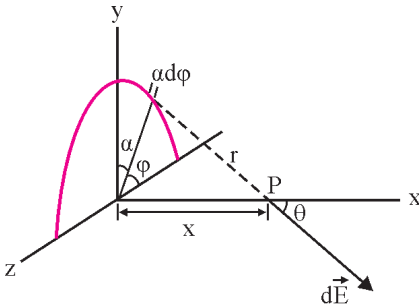
Το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου έχει φορά προς τα αρνητικά του άξονα x , οπότε

$$\vec{E} = -\frac{2\lambda \sin\theta_0}{4\pi\epsilon_0 R} \hat{e}_x$$

Παράδειγμα 1.13

Θεωρείστε ότι το φορτίο Q στο λεπτό δακτυλιοειδές αντικείμενο ακτίνας a , σχ.1.11, βρίσκεται ομοιόμορφα κατανομημένο μόνο στο επάνω ημικύκλιο του δακτυλίου, ενώ στο κάτω ημικύκλιο το φορτίο είναι μηδέν. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο P που βρίσκεται στον άξονά του και σε

απόσταση x από το κέντρο.



Σχήμα 1.11

Ανάλυση

Στο σχ.1.11 εισάγουμε τη γωνία φ με αρχή μέτρησης τον άξονα $-z$. Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου μήκους $a d\varphi$, το οποίο θα φέρει φορτίο

$$dq = \lambda(a d\varphi) = \frac{Q}{\pi a} (a d\varphi) = \frac{Q}{\pi} d\varphi$$

Το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, που παράγεται από αυτό το στοιχειώδες φορτίο είναι:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{Q}{\pi} d\varphi}{x^2 + a^2} = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0} \frac{Q d\varphi}{x^2 + a^2}$$

Λόγω συμμετρίας, η συνιστώσα z της $d\vec{E}$ αναιρείται από την αντίστοιχη συνιστώσα της έντασης που δημιουργεί το φορτίο του συμμετρικού ως προς τον άξονα y στοιχειώδους τμήματος. Για τη συνιστώσα ως προς x ισχύει

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0} \frac{d\varphi}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{Qx}{4\pi^2\epsilon_0} \frac{d\varphi}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

οπότε με ολοκλήρωση

$$E_x = \frac{Qx}{4\pi^2\epsilon_0 (x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\varphi = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (\text{Π1.13-1})$$

Για τη συνιστώσα ως προς y θα είναι

$$\begin{aligned} dE_y &= -dE \sin\theta \sin\varphi = -\frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0} \frac{d\varphi}{x^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \sin\varphi = \\ &= -\frac{Qa}{4\pi^2\epsilon_0} \frac{\sin\varphi d\varphi}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

και ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση

$$E_y = -\frac{Q\alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 (x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{Q\alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 (x^2 + \alpha^2)^{3/2}} [(-\cos \pi) - (-\cos 0)]$$

και τελικά

$$E_y = -\frac{Q\alpha}{2\pi^2 \epsilon_0 (x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \quad (\text{Π1.13-2})$$

Σε διανυσματική μορφή, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι

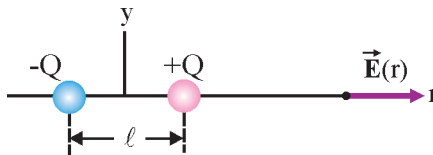
$$\vec{E} = E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \hat{e}_x - \frac{2Q\alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 (x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \hat{e}_y$$

και τελικά

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \left(x\hat{e}_x - \frac{2\alpha}{\pi} \hat{e}_y \right) \quad (\text{Π1.13-3})$$

Παράδειγμα 1.14

Ναδειχθεί ότι στα σημεία Σ κατά μήκος του άξονα ενός διπόλου το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}$, για $r \gg \ell$, όπου r είναι η απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο του διπόλου, p η διπολική ροπή, $p = Q\ell$, και ℓ η απόσταση των ίσων και αντίθετων φορτίων, Q και -Q. Να βρεθεί η φορά της έντασης \vec{E} .



Σχήμα 1.12

Ανάλυση

Έστω ότι ο άξονας του διπόλου ταυτίζεται με τον άξονα x. Η ένταση θα είναι

$$\vec{E} = E_{+Q}\hat{e}_x + E_{-Q}\hat{e}_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\left(r - \frac{1}{2}\ell\right)^2}\hat{e}_x + \frac{(-Q)}{4\pi\epsilon_0\left(r + \frac{1}{2}\ell\right)^2}\hat{e}_x$$

και κάνοντας πράξεις

$$\vec{E} = \frac{Q\left[\left(r + \frac{1}{2}\ell\right)^2 - \left(r - \frac{1}{2}\ell\right)^2\right]}{4\pi\epsilon_0\left(r + \frac{1}{2}\ell\right)^2\left(r - \frac{1}{2}\ell\right)^2}\hat{e}_x = \frac{Q(2r\ell)}{4\pi\epsilon_0\left(r + \frac{1}{2}\ell\right)^2\left(r - \frac{1}{2}\ell\right)^2}\hat{e}_x$$

ενώ παίρνοντας υπόψη και τη συνθήκη $r \gg \ell$

$$\vec{E} = \frac{Q(2r\ell)}{4\pi\epsilon_0 r^4}\hat{e}_x = \frac{2Q\ell}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{e}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}\hat{e}_x$$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει, αν πάρουμε το σημείο Σ αριστερά του $-Q$. Η φορά της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίδια με αυτήν του διανύσματος της διπολικής ροπής, δηλαδή από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο.

Παράδειγμα 1.15

Μία σταγόνα νερού ακτίνας 0.018 mm παραμένει μετέωρη μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Αν η προς τα κάτω συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι 150 N/C, πόσα είναι τα ηλεκτρόνια σε περίσσεια που φορτίζουν τη σταγόνα;

Λύση

Για να παραμείνει η σταγόνα μετέωρη το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης F_E που ασκείται επάνω της πρέπει να είναι ίσο με το βάρος της σταγόνας. Έστω n ο αριθμός των περίσσειων ηλεκτρονίων στη σταγόνα. Είναι

$$F_E = |q|E = mg$$

οπότε

$$neE = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

όπου $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ η πυκνότητα του νερού. Άρα

$$n = \frac{4\pi r^3 \rho g}{3eE} = \frac{4\pi(1.8 \times 10^{-5} \text{ m})^3 (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)}{3(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(150 \text{ N/C})}$$

και τελικά $n = 9.96 \times 10^6 \cong 1.0 \times 10^7$ ηλεκτρόνια.

1.4. Ηλεκτρική Ροή

Η ηλεκτρική ροή που περνάει από μια επίπεδη επιφάνεια εμβαδού S που κείται σε ένα επίπεδο κάθετο προς ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου E , ορίζεται ως

$$\Phi_E = ES \quad (1-8)$$

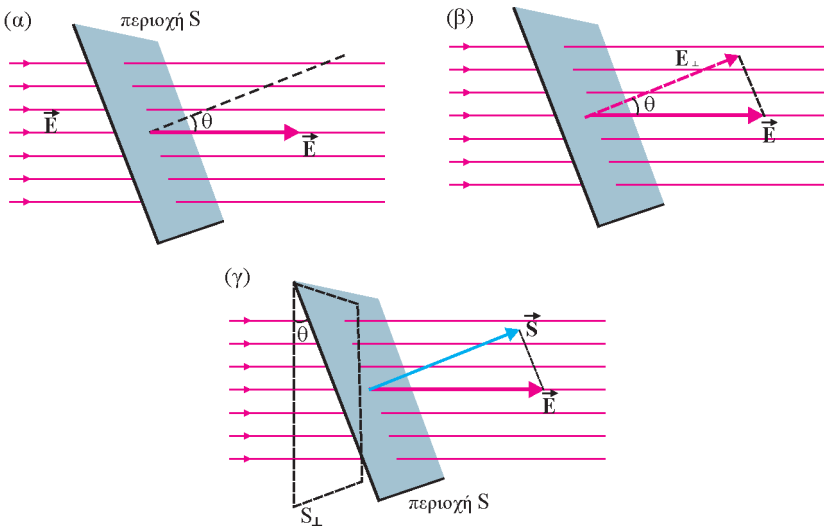
Αν το επίπεδο εμβαδού S δεν είναι κάθετο στο ηλεκτρικό πεδίο, τότε η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = E_{\perp}S = ES_{\perp} = ES\cos\theta \quad (1-9)$$

όπου $E_{\perp} = E\cos\theta$ είναι η συνιστώσα του \vec{E} η κάθετη στο επίπεδο εμβαδού S , και αντίστοιχα $S_{\perp} = S\cos\theta$ είναι η προβολή της επιφάνειας S στο επίπεδο που είναι κάθετο στο ηλεκτρικό πεδίο και θ η γωνία ανάμεσα στο ηλεκτρικό πεδίο και στην κάθετη στην επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχ.1.13.

Αν ορίσουμε ένα διάνυσμα \vec{S} με μέτρο S και διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια αυτή, μπορούμε να γράψουμε για την ηλεκτρική ροή

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} \quad (1-10)$$



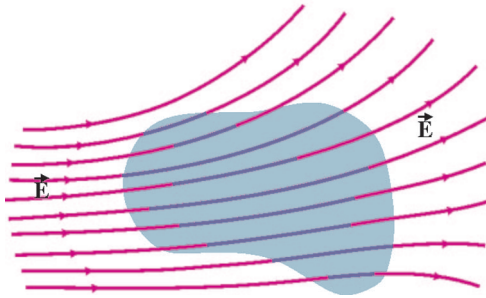
Σχήμα 1.13. (α) Ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} περνά μέσω της επίπεδης επιφάνειας S . (β) $E_{\perp} = E\cos\theta$ είναι η συνιστώσα του \vec{E} η κάθετη στο επίπεδο εμβαδού S . (γ) $S_{\perp} = S\cos\theta$ είναι η προβολή της επιφάνειας S στο επίπεδο που είναι κάθετο στο \vec{E} .

Στην περίπτωση ενός ανομοιογενούς ηλεκτρικού πεδίου και μιας οποιασδήποτε επιφάνειας μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή που περνάει από στοιχειώδεις επιφάνειες $d\vec{S}$ και να ολοκληρώσουμε ως προς ολόκληρη την επιφάνεια.

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1-11)$$

Όταν η επιφάνεια είναι κλειστή, σχ.1.14, μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1-12)$$



Σχήμα 1.14. Ηλεκτρική ροή μέσω κλειστής επιφάνειας.

Όταν υπολογίζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα για μια κλειστή επιφάνεια θεωρούμε κατά συνθήκη, ότι το διάνυσμα $d\vec{S}$ έχει πάντα διεύθυνση προς τα έξω, σε σχέση με την επιφάνεια. Γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που εισέρχονται στον όγκο που περικλείει η κλειστή επιφάνεια έχουν πάντα αρνητική συνεισφορά στην ηλεκτρική ροή, ενώ οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που εξέρχονται από τον όγκο που περικλείει η κλειστή επιφάνεια έχουν πάντα θετική συνεισφορά στην ηλεκτρική ροή που περνάει μέσα από αυτήν την επιφάνεια.

1.5. Νόμος του Gauss

Σύμφωνα με τον μαθηματικό Karl Friedrich Gauss (1777-1855), η ηλεκτρική ροή που περνάει μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη του φορτίου Q που περικλείει η κλειστή αυτή επιφάνεια.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{εστ}}}{\epsilon_0} \quad (1-13)$$

Η σχέση (1-13) είναι γνωστή ως νόμος του Gauss.

Παράδειγμα 1.16.

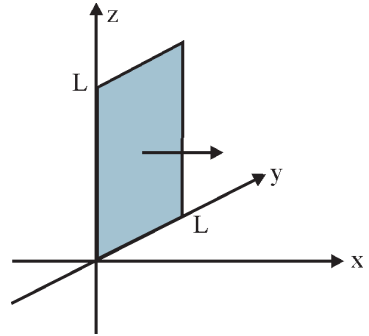
Η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου, ως συνάρτηση της θέσης στο επίπεδο yz, δίνεται από τη σχέση

$$\vec{E}(y,z) = E_0 \frac{yz}{L^2} \hat{e}_x + E_1 \frac{y^2 z^2}{L^4} \hat{e}_y \quad (\text{Π1.16-1})$$

Να βρεθεί η ροή που περνάει από ένα τετράγωνο πλαίσιο με κορυφές στα σημεία $(0,0,0)$, $(0,L,0)$, $(0,L,L)$ και $(0,0,L)$, όπως φαίνεται στο σχ.1.15.

Λύση

Η στοιχειώδης ηλεκτρική ροή $d\Phi_E$ που περνάει από μια στοιχειώδη επιφάνεια dS με κέντρο στο σημείο $(0,y,z)$ είναι



Σχήμα 1.15

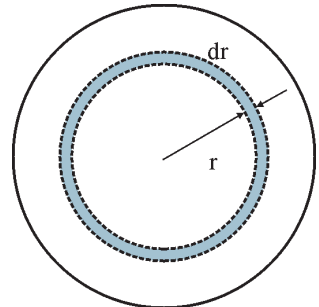
$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left(E_0 \frac{yz}{L^2} \hat{e}_x + E_1 \frac{y^2 z^2}{L^4} \hat{e}_y \right) \cdot (dydz \hat{e}_x) = E_0 \frac{yz}{L^2} dydz$$

Η ολική ηλεκτρική ροή προκύπτει από την ολοκλήρωση της $d\Phi_E$ ως προς y και z

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \int_{z=0}^L \int_{y=0}^L E_0 \frac{yz}{L^2} dydz = \frac{E_0}{L^2} \int_{y=0}^L y dy \int_{z=0}^L z dz = \frac{1}{4} E_0 L^2$$

Παράδειγμα 1.17.

Υποθέτουμε, ότι η πυκνότητα φορτίου της σφαίρας στο σχ.1.16 δεν είναι ομοιογενής, αλλά δίνεται από τη σχέση $\rho_E = ar^2$, όπου a είναι μία σταθερά. Να βρεθεί (α) η σταθερά a συναρτήσει του φορτίου Q και της ακτίνας R της σφαίρας και (β) η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει του r στο εσωτερικό της σφαίρας.



Σχήμα 1.16

Λύση

(α) Χωρίζουμε τη σφαίρα σε ομόκεντρους στοιχειώδεις σφαιρικούς φλοιούς πάχους dt . Οι φλοιοί αυτοί έχουν όγκο $d\tau = 4\pi r^2 dr$. Το ολικό φορτίο της σφαίρας θα είναι

$$Q = \int \rho_E d\tau = \int_0^R (\alpha r^2)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\alpha \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\alpha}{5} R^5$$

οπότε η σταθερά α θα είναι

$$\alpha = \frac{5Q}{4\pi R^5} \quad (\text{Π1.17-1})$$

(β) Για την εύρεση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της σφαίρας σε απόσταση r από το κέντρο της εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss. Θεωρούμε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r η οποία περικλείει φορτίο q ίσο με

$$q = \int \rho_E d\tau = \int_0^r (\alpha r^2)(4\pi r^2 dr) = \int_0^r \left(\frac{5Q}{4\pi R^5} r^2 \right) 4\pi r^2 dr = Q \frac{r^5}{R^5}$$

Λόγω συμμετρίας η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι ίδια σε όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r , και κάθετη σε αυτή. Ο νόμος του Gauss, εξ.(1-13), δίνει

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{εστ}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Είναι

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

οπότε

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q r^5}{R^5}$$

και τελικά

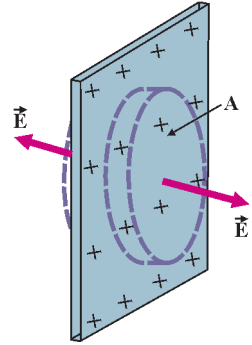
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^5} r^3$$

Παράδειγμα 1.18

Μια πολύ μεγάλη, αλλά πολύ λεπτή μη αγώγιμη επίπεδη επιφάνεια είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημεία κοντά στην επιφάνεια.

Ανάλυση

Επιλέγουμε για Γκαουσιανή επιφάνεια ένα μικρό ορθό κύλινδρο με τον άξονά του κάθετα στην επιφάνεια, ο οποίος επεκτείνεται συμμετρικά και στους δύο χώρους τους οποίους ορίζει η επιφάνεια, σχ.1.17, και περικλείει φορτίο q . Λόγω συμμετρίας το διάνυσμα \vec{E} είναι κάθετο στην επιφάνεια και στις δύο πλευρές και είναι ομοιόμορφο σε όλη την επιφάνεια που περικλείουν οι βάσεις του κυλίνδρου. Καθώς από την πλευρική επιφάνεια του κυλίνδρου δεν περνά ηλεκτρική ροή, ολόκληρη η ροή περνά από τις βάσεις του κυλίνδρου. Έτσι, ο νόμος του Gauss δίνει



Σχήμα 1.17

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int_{\text{βασεις}} dS = 2ES_{\text{βασης}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

οπότε

$$2ES_{\text{βασης}} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_{\text{βασης}}}{\epsilon_0}$$

και τελικά

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Όπως φαίνεται από την τελευταία εξίσωση, το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι ανεξάρτητο της απόστασης από την επιφάνεια.

Παράδειγμα 1.19

Ένας πολύ μακρύς κύλινδρος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα κατά μήκος, ενώ η ακτινική μεταβολή της πυκνότητας φορτίου δίνεται από τη σχέση:

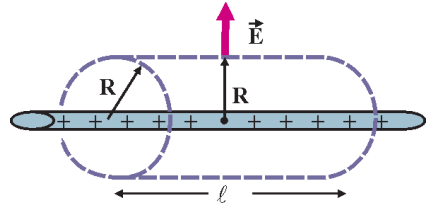
$$\rho(r) = \rho_0 (A - r) / A \quad \text{για } r < A$$

$$\rho(r) = 0 \quad \text{για } r > A$$

Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για $r < A$ και για $r > A$.

Λύση

Λόγω συμμετρίας της κατανομής του φορτίου η διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι ακτινική και το μέτρο της εξαρτάται μόνο από το r . Επιλέγουμε ένα κύλινδρο ως Γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα R και μήκος ℓ , όπως φαίνεται στο Σχ.1.18. Το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του κυλίνδρου είναι συνάρτηση της R , $E(R)$. Η ηλεκτρική ροή που περνά από την κυλινδρική επιφάνεια είναι:



Σχήμα 1.18

$$\Phi_E = 2\pi R \ell E(R) \quad (\text{Π1.19-1})$$

(α) Για $r < A$, το φορτίο που περικλείει η γκαουσιανή επιφάνεια είναι

$$Q_{\text{εστ}} = \int \rho dt = \int_{x=0}^{\ell} \int_{r=0}^R \rho_0 \frac{A-r}{A} 2\pi r dr dx$$

και μετά τις ολοκληρώσεις

$$Q_{\text{εστ}} = 2\pi\rho_0\ell \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3A} \right)_{r=0}^R = 2\pi\rho_0\ell \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3A} \right) \quad (\text{Π1.19-2})$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για $r < A$ μπορούμε να βρούμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Είναι $\Phi_E = \frac{Q_{\text{εστ}}}{\epsilon_0}$, οπότε αντικαθιστώντας από τις σχέσεις (Π1.19-1) και (Π1.19-2)

$$2\pi R \ell E(R) = \frac{2\pi\rho_0\ell}{\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3A} \right)$$

και τελικά

$$E(R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{2} - \frac{R^2}{3A} \right), \quad R < A \quad (\text{Π1.19-3})$$

β) Για $r > A$, το φορτίο που περικλείει ο κύλινδρος με $R > A$ είναι ίσο με το ολικό φορτίο και θα δίνεται από τη σχέση (Π1.19-2) για $R = A$, δηλαδή

$$Q_{\text{ολ}} = 2\pi\rho_0\ell \left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^3}{3A} \right) = 2\pi\rho_0\ell \left(\frac{A^2}{6} \right) \quad (\text{Π1.19-4})$$

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss είναι $\Phi_E = \frac{Q_{\text{ολ}}}{\epsilon_0}$, οπότε αντικαθιστώντας

από τις σχέσεις (Π1.19-1) και (Π1.19-4)

$$2\pi R \ell E(R) = \frac{2\pi \rho_0 \ell}{\epsilon_0} \left(\frac{A^2}{6} \right)$$

και τελικά

$$E(R) = \frac{\rho_0 A^2}{6\epsilon_0 R}, \quad R > A \quad (\text{Π1.19-5})$$

Παράδειγμα 1.20

Μία πολύ μεγάλη (υποθέστε άπειρου μήκους) μακρόστενη πλάκα μη αγωγίμου υλικού έχει πάχος d και φορτίο ομοιόμορφης πυκνότητας ρ_E . Ναδειχτεί ότι στο χώρο έξω από την πλάκα υπάρχει ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο. Να βρεθεί το μέτρο και η διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ως προς την επιφάνεια της πλάκας.

Λύση

Επιλέγουμε ως Γκαουσιανή επιφάνεια έναν κύλινδρο με τις βάσεις του παράλληλες στην επιφάνεια της πλάκας και σε ίση απόσταση από αυτήν. Λόγω συμμετρίας η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα έχει διεύθυνση κάθετη προς τα έξω σε σχέση με την επιφάνεια της πλάκας. Έτσι, από την κυλινδρική επιφάνεια δεν θα περνά ηλεκτρική ροή. Η ηλεκτρική ροή που θα περνά από τις βάσεις του κυλίνδρου λόγω συμμετρίας θα είναι

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int_{\text{βασης}} dS = 2ES_{\text{βασης}} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{Π1.20-1})$$

Το φορτίο q που περικλείει η γκαουσιανή επιφάνεια θα είναι

$$q = \rho_E (S_{\text{βασης}} d)$$

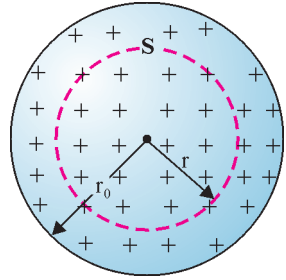
Αντικαθιστούμε στην εξ. (Π1.20-1) και τελικά

$$E = \frac{\rho_E d}{2\epsilon_0} \quad (\text{Π1.20-2})$$

Όπως φαίνεται από την εξ. (Π1.20-2) το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι ανεξάρτητο της απόστασης από την πλάκα.

Παράδειγμα 1.21

Φορτίο $+Q$ είναι κατανεμημένο μέσα σε στερεά σφαίρα ακτίνας r_0 έτσι, ώστε η πυκνότητα φορτίου να είναι συνάρτηση της ακτινικής θέσης μέσα στη σφαίρα, της μορφής $\rho_E(r) = \rho_0 (r/r_0)$. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στη σφαίρα ως συνάρτηση των Q , r_0 και της ακτινικής θέσης r .



Σχήμα 1.19

Λύση

Θεωρούμε Γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r \leq r_0$ (σχ.1.19). Το φορτίο q που περικλείει θα είναι

$$q = \int \rho_E d\tau = \int_0^r \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_0 \pi r^4}{r_0} \quad (\text{Π1.21-1})$$

Στην προηγούμενη σχέση, όταν $r \rightarrow r_0$, τότε $q \rightarrow Q$, οπότε μπορούμε να βρούμε τη σταθερά ρ_0 ως συνάρτηση του φορτίου Q , δηλαδή

$$Q = \frac{\rho_0 \pi r_0^4}{r_0} = \rho_0 \pi r_0^3$$

και

$$\rho_0 = \frac{Q}{\pi r_0^3} \quad (\text{Π1.21-2})$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (Π1.21-1) και (Π1.21-2) δίνει

$$q(r) = \frac{Q}{\pi r_0^3} \frac{\pi r^4}{r_0} = Q \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 \quad (\text{Π1.21-3})$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα βρεθεί από το νόμο του Gauss. Η διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι ακτινική προς τα έξω αφού το φορτίο Q είναι θετικό, οπότε \vec{E} και $d\vec{S}$ είναι ομόρροπα διανύσματα.

$$\oint_{S(r)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S(r)} E dS = E \oint_{S(r)} dS = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

και

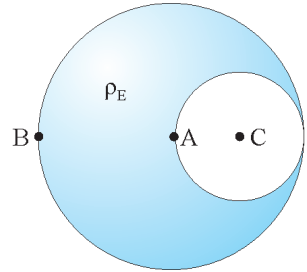
$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^4$$

Τελικά

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{r_0^4} \quad (\text{Π1.21-4})$$

Παράδειγμα 1.22

Μια σφαίρα ακτίνας R φέρει φορτίο πυκνότητας όγκου ρ_E . Μια σφαιρική κοιλότητα ακτίνας $R/2$ αφαιρείται από το δεξιό μέρος και παραμένει κενή, όπως φαίνεται στο σχ.1.20. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (α) στο σημείο A και (β) στο σημείο B . Τα σημεία A και C είναι τα κέντρα των αντίστοιχων σφαιρών.



Σχήμα 1.20

Λύση

Θεωρούμε το σύστημα, ως ένα συνδυασμό από δύο σφαίρες. Η πρώτη είναι μια στερεά σφαίρα με κέντρο το A , ακτίνα R και με πυκνότητα όγκου φορτίων ίσο με ρ_E . Η δεύτερη είναι μια σφαίρα με κέντρο το C , ακτίνα $R/2$ και με πυκνότητα $-\rho_E$.

(α) Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο A που οφείλεται στην πρώτη σφαίρα είναι μηδέν λόγω συμμετρίας. Συνεπώς το ηλεκτρικό πεδίο στο A οφείλεται στη δεύτερη σφαίρα. Για να το υπολογίσουμε εισάγουμε μια Γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το C και ακτίνα $R/2$ που περικλείει φορτίο q . Θα είναι

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint dS = ES = \frac{q}{\epsilon_0}$$

οπότε

$$E4\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{(-\rho_E) \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^3}{\epsilon_0}$$

και τελικά στο A η ένταση του πεδίου θα είναι

$$E_A = -\frac{\rho_E R}{6\epsilon_0} \quad (\text{Π1.22-1})$$

δηλαδή με φορά προς το C.

β) Στο σημείο B η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι το άθροισμα των εντάσεων του ηλεκτρικού πεδίου κάθε σφαίρας. Το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}_1 που οφείλεται στη σφαίρα A υπολογίζεται αν θεωρήσουμε μια γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το A και ακτίνα R που περικλείει φορτίο q_1 . Είναι

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = E_1 \oint dS = E_1 S = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

οπότε

$$E_1 4\pi R^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_E}{\epsilon_0}$$

και τελικά $E_1 = \frac{\rho_E R}{3\epsilon_0}$, και σε διανυσματική μορφή, με φορά προς τα έξω,

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_E R}{3\epsilon_0} \hat{e}_R \quad (\text{Π1.22-2})$$

Το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στη σφαίρα C υπολογίζεται αν θεωρήσουμε μια Γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το C και ακτίνα $3R/2$ που περικλείει φορτίο q_2 . Είναι

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = E_2 \oint dS = E_2 S = \frac{q_2}{\epsilon_0}$$

οπότε

$$E_2 4\pi \left(\frac{3}{2}R\right)^2 = \frac{(-\rho_E) \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}R\right)^3}{\epsilon_0}$$

και τελικά $E_2 = -\frac{\rho_E R}{54\epsilon_0}$, και σε διανυσματική μορφή

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho_E R}{54\epsilon_0} \hat{e}_R \quad (\text{Π1.22-3})$$

Η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο B θα είναι:

$$\vec{E}_B = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_E R}{3\epsilon_0} \hat{e}_R - \frac{\rho_E R}{54\epsilon_0} \hat{e}_R = \frac{17\rho_E R}{54\epsilon_0} \hat{e}_R \quad (\text{Π1.22-4})$$

1.6. Δυναμικό Ηλεκτροστατικού Πεδίου

Θεωρούμε μια κατανομή φορτίων, η οποία δημιουργεί ηλεκτροστατικό πεδίο με ένταση $\vec{E}_{\eta\lambda}$. Το έργο που απαιτείται για τη μετατόπιση της μονάδας του θετικού φορτίου από το σημείο A στο σημείο B του πεδίου αντίθετα στις ηλεκτρικές δυνάμεις θα είναι

$$W_{(q=1)} = -\int_A^B \vec{E}_{\eta\lambda} \cdot d\vec{\ell} = -\int_A^B \vec{E}_{\eta\lambda} \cdot d\vec{\ell} \quad (1-14)$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της εξ.(1-14) ορίζει τη διαφορά δυναμικού $V_B - V_A$ του ηλεκτροστατικού πεδίου μεταξύ των σημείων A και B. Είναι δηλαδή

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}_{\eta\lambda} \cdot d\vec{\ell} \quad (1-15)$$

Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης στο ηλεκτροστατικό πεδίο. Ένα τέτοιο πεδίο ονομάζεται **συντηρητικό**.

Με βάση τον ορισμό που δόθηκε, σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο μόνο οι διαφορές δυναμικού ορίζονται απολύτως. Η ίδια η συνάρτηση ορίζεται με προσέγγιση σταθεράς. Δηλαδή το δυναμικό του σημείου B, V_B , ορίζεται απόλυτα για ορισμένη τιμή του V_A , τιμή η οποία θεωρείται ως **δυναμικό αναφοράς**.

Επειδή το πεδίο είναι συντηρητικό, ισχύει $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Αυτό το πολύ σημαντικό αποτέλεσμα είναι συνέπεια του γεγονότος, ότι οι ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ δύο σημειακών φορτίων έχουν τη διεύθυνση της ευθείας, η οποία ενώνει τα δύο φορτία που αλληλεπιδρούν, και είναι συναρτήσεις μόνο της μεταξύ τους απόστασης.

Παίρνοντας υπόψη μας τη διανυσματική ταυτότητα, η οποία ισχύει για κάθε αριθμητική συνάρτηση Ψ , $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Psi \equiv 0$, συμπεραίνουμε, ότι είναι δυνατό να ορίσουμε μια αριθμητική συνάρτηση V , η οποία σχετίζεται με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και είναι

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (1-16)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο είναι προϊόν σύμβασης. Η αριθμητική συνάρτηση V είναι η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού.

Το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\nabla}V$ ονομάζεται **κλίση** της αριθμητικής συνάρτησης V . Η φορά του συμπίπτει με την κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης της συνάρτησης V , ενώ το μέτρο του $|\vec{\nabla}V|$ δίνει την κλίση κατά μήκος αυτής της κατεύθυνσης.

Σε ορθογώνιες συντεταγμένες είναι

$$\vec{\nabla}V(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{e}_z \quad (1-17\alpha)$$

σε σφαιρικές

$$\vec{\nabla}V(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \quad (1-17\beta)$$

και σε κυλινδρικές

$$\vec{\nabla}V(\alpha,\varphi,z) = \frac{\partial V}{\partial \alpha} \hat{e}_\alpha + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{e}_z \quad (1-17\gamma)$$

Η συνάρτηση του δυναμικού στη θέση-2 με διάνυσμα θέσης \vec{r} που οφείλεται σε συνεχή κατανομή φορτίων στη θέση-1, δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$V(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}_1)}{r_{12}} \quad (1-18)$$

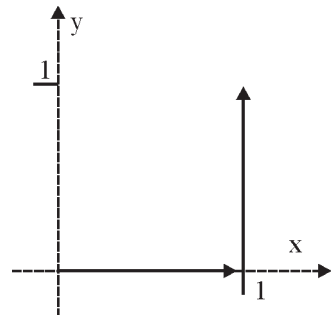
όπου \vec{r}_1 το διάνυσμα θέσης του στοιχειώδους φορτίου dq .

Παράδειγμα 1.23

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε μια περιοχή του χώρου δίνεται από τη σχέση $\vec{E}(x,y) = Axy\hat{e}_x + Bx^2y\hat{e}_y$. Να βρεθεί η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$.

Λύση

Για τον υπολογισμό της διαφοράς δυναμικού επιλέγουμε μια «βολική» διαδρομή από το σημείο $(0,0)$ στο σημείο $(1,1)$. Καθώς η ηλεκτρική



Σχήμα 1.21

δύναμη είναι συντηρητική δύναμη, τόσο αυτή όσο και το ολοκλήρωμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτώνται μόνον από την αρχική και την τελική θέση. Για τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο σημεία του χώρου ισχύει

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Θεωρούμε τη διαδρομή που δίνεται στο σχ.1.21, πρώτα κατά μήκος του άξονα- x από το $x = 0$ έως το $x = 1$ και ύστερα κατά μήκος της γραμμής από το $y = 0$ έως το $y = 1$. Κατά μήκος του πρώτου τμήματος της διαδρομής το $\vec{E} = 0$, επειδή $y = 0$. Κατά μήκος του δεύτερου τμήματος της διαδρομής το $d\vec{\ell}_1$ έχει τη φορά του \hat{e}_y , ενώ

$$\vec{E}(1,y) = Ay\hat{e}_x + By\hat{e}_y$$

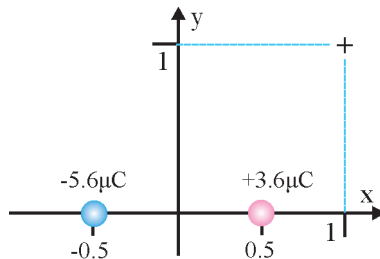
$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}(1,y) \cdot d\vec{\ell}_1 = -\int_{y=0}^1 (Ay\hat{e}_x + By\hat{e}_y) \cdot \hat{e}_y dy = -\int_{y=0}^1 B y dy = \left[-\frac{1}{2} B y^2 \right]_0^1$$

Και τελικά

$$V_{(1,1)} - V_{(0,0)} = -\frac{1}{2} B$$

Παράδειγμα 1.24

Δύο φορτία $Q_1 = -3.6 \mu\text{C}$ και $Q_2 = +5.6 \mu\text{C}$, βρίσκονται στις θέσεις $(x_1, y_1) = (-0.5, 0)$ και $(x_2, y_2) = (+0.5, 0)$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο Σχ.1.22. Αν ένα φορτίο $q = 10.0 \mu\text{C}$ μετακινηθεί από το άπειρο στη θέση $(x, y) = (1, 1)$, να βρεθεί η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειάς του.



Σχήμα 1.22

Λύση

Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο (1,1) είναι το άθροισμα των ηλεκτρικών δυναμικών σε αυτό το σημείο από κάθε ένα από τα δύο φορτία. Το ηλεκτρικό δυναμικό σε άπειρη απόσταση από τα δύο φορτία θα είναι μηδέν. Οι αποστάσεις r_1 και r_2 των φορτίων $-3.6 \mu\text{C}$ και $+5.6 \mu\text{C}$ από το σημείο (1,1) είναι αντίστοιχα

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{[1 - (-0.5)]^2 + [1 - 0.0]^2} = 1.80 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \sqrt{[1 - (0.5)]^2 + [1 - 0.0]^2} = 1.12 \text{ m}$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό στη θέση (1,1) θα είναι

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right) = \\ &= \left(9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2 \right) \left(\frac{-3.6 \times 10^{-6} \text{ C}}{1.80 \text{ m}} + \frac{5.6 \times 10^{-6} \text{ C}}{1.12 \text{ m}} \right) \end{aligned}$$

Και τελικά

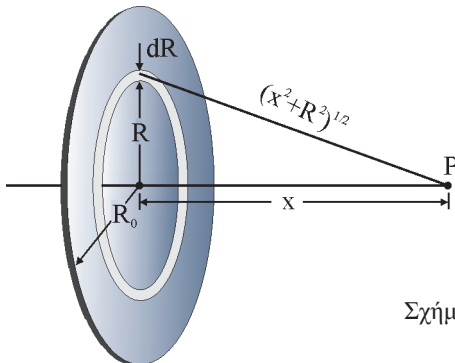
$$V_{1,1} = 27 \times 10^3 \text{ V}$$

Η δυναμική ενέργεια για το φορτίο $q = 10.0 \mu\text{C}$ στο σημείο (1,1) θα είναι:

$$U = qV_{1,1} = (10.0 \times 10^{-6} \text{ V}) (27 \times 10^3 \text{ V}) = 27 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Παράδειγμα 1.25

Ένας λεπτός επίπεδος δίσκος έχει ακτίνα R_0 και είναι ομοιόμορφα φορτισμένος



Σχήμα 1.23

με φορτίο Q . Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο P στον άξονα του δίσκου και σε απόσταση x από το κέντρο του, όπως φαίνεται στο σχ.1.23.

Λύση

Χωρίζουμε τον δίσκο σε λεπτούς δακτυλίους ακτίνας R και πάχους dR . Εφ' όσον το φορτίο Q είναι ομοιόμορφα καταμεμημένο με επιφανειακή πυκνότητα ίση με σ , το φορτίο dq που περιέχει κάθε δακτύλιος θα είναι ανάλογο του εμβαδού του, $dS = (2\pi R)(dR)$. Θα είναι

$$\frac{dq}{Q} = \frac{\sigma(2\pi R dR)}{\sigma(\pi R_0^2)}$$

οπότε

$$dq = Q \frac{(2\pi R)(dR)}{\pi R_0^2} = \frac{2QR dR}{R_0^2}$$

Ισχύει

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{(x^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \int_0^{R_0} \frac{R dR}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

Επειδή το x είναι σταθερό, θα είναι $d(x^2 + R^2) = 2R dR$ και η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \int_0^{R_0} \frac{d(x^2 + R^2)}{(x^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[\frac{(x^2 + R^2)^{1/2}}{1/2} \right]_{R=0}^{R_0}$$

και τελικά

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[(x^2 + R_0^2)^{1/2} - (x^2)^{1/2} \right] = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[(x^2 + R_0^2)^{1/2} - |x| \right] \end{aligned} \quad (\text{Π1.25-1})$$

Η απόλυτη τιμή στην τελευταία σχέση είναι απαραίτητη, επειδή το δυναμικό έχει την ίδια τιμή για την ίδια απόσταση δεξιά και αριστερά του δίσκου, δηλαδή για θετικές και αρνητικές τιμές του x .

• Για απόσταση $x \gg R_0$, η τιμή του δυναμικού θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 V_{\infty} &\cong \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[|x| \left(1 + \frac{R_0^2}{x^2} \right)^{1/2} - |x| \right] = \\
 &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[|x| \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R_0^2}{x^2} \right) - |x| \right] = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left(\frac{1}{2} \frac{R_0^2}{|x|} \right)
 \end{aligned}$$

και τελικά

$$V_{\infty} \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |x|} \quad (\text{Π1.25-2})$$

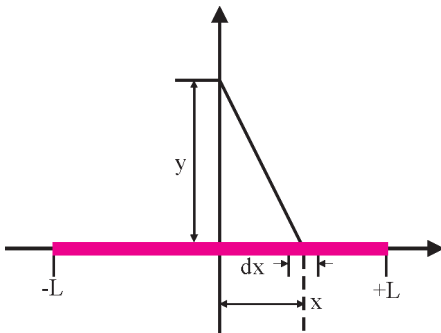
Δηλαδή, από το πολύ απομακρυσμένο σημείο P ο δίσκος θα θεωρείται ως σημειακό φορτίο.

Παράδειγμα 1.26

Θεωρούμε μια γραμμική κατανομή φορτίου κατά μήκος του άξονα x ανάμεσα στα σημεία $x = -L$ και $x = +L$, σχ.1.24. Η γραμμική πυκνότητα του κατανεμημένου φορτίου, ως συνάρτηση της θέσης, δίνεται από τη σχέση

$\lambda(x) = \frac{\lambda_0}{L} |x|$. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό, ως συνάρτηση της θέσης,

κατά μήκος του άξονα y .



Σχήμα 1.24

Λύση

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα της κατανομής, μήκους dx , που βρίσκεται σε απόσταση x από τον άξονα y . Το στοιχειώδες τμήμα φέρει φορτίο $dq = \lambda dx$. Η απόστασή του από ένα σημείο του άξονα y είναι $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Το στοιχειώδες ηλεκτρικό δυναμικό dV στον άξονα y εξ αιτίας του

στοιχειώδους φορτίου dx είναι

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \frac{|x| dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση προκύπτει

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \int_{-L}^L \frac{|x| dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \left\{ \int_{-L}^0 \frac{(-x) dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \int_0^L \frac{(+x) dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}$$

δηλαδή

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \left\{ \left[-\sqrt{x^2 + y^2} \right]_{-L}^0 + \left[\sqrt{x^2 + y^2} \right]_0^L \right\}$$

και τελικά

$$V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{L} \left[\sqrt{L^2 + y^2} - y \right]$$

Παράδειγμα 1.27

Το δυναμικό ενός ηλεκτροστατικού πεδίου δίνεται από τη σχέση $V(x,y,z) = V_0 x^2 y z^3 / L^6$, όπου L μια σταθερά με διαστάσεις μήκους. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Λύση

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία είναι $\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}V(x,y,z)$, δηλαδή

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y + E_z \hat{e}_z = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{e}_z, \text{ οπότε}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V_0}{L^6} x^2 y z^3 \right) = -2 \frac{V_0}{L^6} x y z^3$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V_0}{L^6} x^2 y z^3 \right) = -\frac{V_0}{L^6} x^2 z^3$$

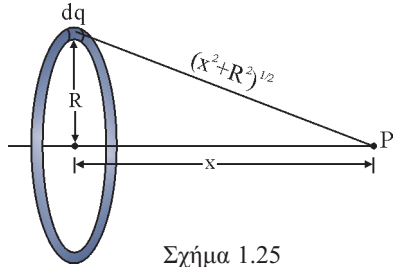
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_0}{L^6} x^2 y z^3 \right) = -3 \frac{V_0}{L^6} x^2 y z^2$$

Τελικά

$$\vec{E}(x,y,z) = -\frac{V_0}{L^6} xz^2 (2yz\hat{x} + xz\hat{y} + 3xy\hat{z})$$

Παράδειγμα 1.28

Χρησιμοποιήστε το ηλεκτρικό δυναμικό για την εύρεση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο P πάνω στον άξονα (α) ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου, ακτίνας R, με φορτίο Q και (β) ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου, ακτίνας R_0 , με φορτίο Q.



Λύση

(α) Για το δυναμικό του δακτυλίου, σχ.1.25, σε απόσταση r από τα σημεία της περιφέρειας του και πάνω στον άξονα x ισχύει

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

Έτσι,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες είναι ίσες με μηδέν.

(β) Στο παράδειγμα 1.25 βρήκαμε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο P στον άξονα του δίσκου και σε απόσταση x από το κέντρο του δίνεται από τη σχέση (Π1.25-1)

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[(x^2 + R_0^2)^{1/2} - |x| \right]$$

Η ένταση του πεδίου στο P θα είναι

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[1 - \frac{x}{(x^2 + R_0^2)^{1/2}} \right]$$

ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες είναι ίσες με μηδέν.

• Στα σημεία πολύ κοντά στο δίσκο, όπου $x \ll R_0$ θα είναι

$$E_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[1 - \frac{x}{(x^2 + R_0^2)^{1/2}} \right] = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left[1 - \frac{x/R_0}{(x^2/R_0^2 + 1)^{1/2}} \right]$$

και τελικά

$$E_x \cong \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

όπου $\sigma = Q/\pi R_0^2$ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

Παράδειγμα 1.29. Τα "μικρά" και τα "μεγάλα"

Το στοιχειώδες φορτίο είναι πολύ μικρό, αλλά τα στοιχειώδη σωματίδια στη συνήθη ύλη είναι πάρα πολλά, έτσι τα "μικρά" και τα "μεγάλα" αντισταθμίζονται. Για να πάρουμε μιά ιδέα, θα υποθέσουμε ότι θα ήταν δυνατό (που δέν είναι) να χωρίσουμε όλα τα ηλεκτρόνια ενός mole υδρογόνου (δύο γραμμαρίων H_2 , δηλαδή) από τους πυρήνες, και να τοποθετήσουμε τα μεν στη Φλώρινα, τους δε στη Ρόδο. Αν υποθέσουμε ότι η απόσταση Φλώρινας - Ρόδου είναι 900 χιλιόμετρα, με πόση δύναμη θα έλκονται μεταξύ τους;

Για να προσθέσουμε εντυπωσιασμό, θα ξεκινήσουμε υπολογίζοντας την ελκτική δύναμη μεταξύ ενός μόνο πρωτονίου που βρίσκεται στη Φλώρινα κι ενός ηλεκτρονίου που είναι στη Ρόδο, το μέτρο της οποίας θα είναι

$$F_{\phi-p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\phi q_p}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(9 \times 10^5)^2} = 2.8 \times 10^{-40} \text{ N}$$

Περιττό να πούμε, ότι η δύναμη αυτή δε μπορεί καν να μετρηθεί!

Για να βρούμε, τώρα τη δύναμη που μας ζητάει η άσκηση, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το φορτίο ενός πρωτονίου με τον αριθμό των πρωτονίων ανά mole (δηλ. τον αριθμό του Αβογκάντρο), και να κάνουμε το ίδιο και με τα ηλεκτρόνια. Αυτό σημαίνει πως το τελικό μας αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμός που βρήκαμε πριν, πολλαπλασιασμένος επί το τετράγωνο του αριθμού του Αβογκάντρο:

$$F = 2.8 \times 10^{-40} \times (6.023 \times 10^{23})^2 = 101.6 \times 10^6 \text{ N} \approx 10 \text{ χιλιάδες τόννοι!}$$

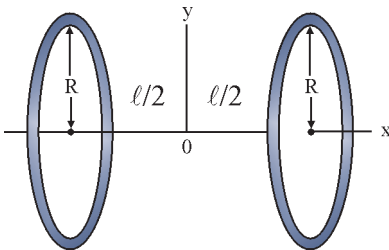
Ελπίζεται ότι έγινε κατανοητό, πώς τα πολύ μικρά μεγέθη αντισταθμίζονται από τα πολύ μεγάλα.

Προβλήματα

1.1. Δύο σημειακά φορτία Q και $-Q$ βρίσκονται σε απόσταση d . Να βρεθεί η θέση στην οποία πρέπει να τοποθετηθεί ένα τρίτο σημειακό φορτίο Q , ώστε η δύναμη που ασκείται επάνω του να είναι μηδέν. Να λυθεί το πρόβλημα και για την περίπτωση όπου και τα τρία φορτία είναι θετικά.

1.2. Τέσσερα φορτία ίσου απόλυτου μεγέθους τοποθετούνται στις γωνίες ενός τετραγώνου. Ποια διάταξη των φορτίων θα έχει σαν αποτέλεσμα την μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του τετραγώνου; Επιλέξτε από τις ακόλουθες διατάξεις και δικαιολογήστε την απάντησή σας: (α) τέσσερα θετικά φορτία, (β) τέσσερα αρνητικά φορτία, (γ) τρία θετικά και ένα αρνητικό, (δ) δύο θετικά και δύο αρνητικά και (ε) τρία αρνητικά και ένα θετικό;

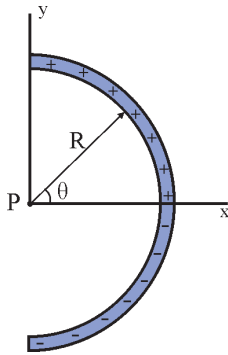
1.3. Δύο παράλληλοι κυκλικόι δακτύλιοι ακτίνας R έχουν τα κέντρα τους στον άξονα x , τα οποία απέχουν απόσταση 2ℓ , όπως φαίνεται στο σχ.1.26. Αν κάθε δακτύλιος φέρει φορτίο Q , ομοιόμορφα κατανεμημένο, να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(x)$ στα σημεία του άξονα x .



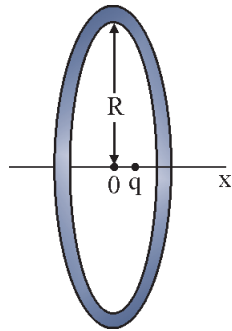
Σχήμα 1.26.

1.4. Μία λεπτή μη-αγώγιμη ράβδος έχει σχήμα ημικυκλίου με κέντρο P και ακτίνα ίση με R , σχ.1.27. Η ράβδος φέρει μια μη-ομοιόμορφη κατανομή φορτίου με γραμμική πυκνότητα $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$, όπου λ_0 είναι μια θετική σταθερά. Να υπολογίσετε την ένταση \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P . [Υπόδειξη: Είναι $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, οπότε τα δύο τεταρτοκύκλια της ράβδου φέρουν αντίθετα φορτία.]

1.5. Ένα θετικό φορτίο q είναι τοποθετημένο στο κέντρο O ενός κυκλικού δακτύλιου ακτίνας R , σχ.1.28. Ο δακτύλιος φέρει μια ομοιόμορφη κατανομή αρνητικού φορτίου, συνολικού μεγέθους $-Q$. (α) Αν το φορτίο q μετατοπιστεί από το O κατά μια μικρή απόσταση x , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι θα κάνει μια απλή αρμονική ταλάντωση. (β) Αν η μάζα του είναι ίση με m , να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

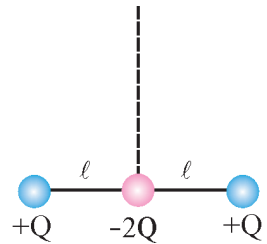


Σχήμα 1.27.



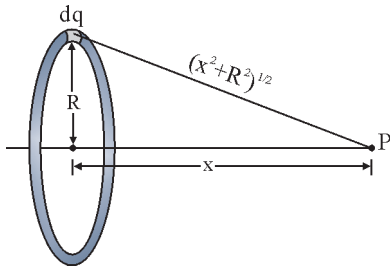
Σχήμα 1.28.

1.6. Η διάταξη των φορτίων του σχ.1.29 αποτελεί ένα είδος ηλεκτρικού τετραπόλου. Να υπολογίσετε την ένταση \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία της μεσοκαθέτου στο ευθύγραμμο τμήμα, που ορίζεται από τα δύο θετικά φορτία. Στη συνέχεια, να αποδείξετε, ότι η ένταση σε τυχαίο σημείο του χώρου είναι ανάλογη του $1/r^4$, για $r \gg \ell$, όπου το r το μετράμε από τη θέση του κεντρικού φορτίου.

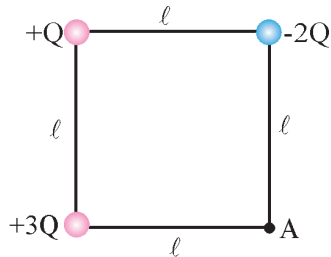


Σχήμα 1.29.

1.7. Ένας λεπτός κυκλικός δακτύλιος ακτίνας R , σχ.1.30, έχει φορτίο $+Q/2$ κατανεμημένο ομοιόμορφα στο πάνω ημικύκλιο, και φορτίο $-Q/2$ κατανεμημένο ομοιόμορφα στο κάτω ημικύκλιο. (α) Ποιοί είναι το δυναμικό στο σημείο P του άξονα του κάθετου στο επίπεδο του δακτυλίου που περνά από το κέντρο του; (β) Πόση είναι ένταση \vec{E} στο ίδιο σημείο;



Σχήμα 1.30.

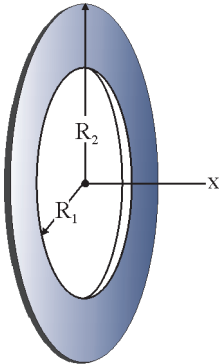


Σχήμα 1.31.

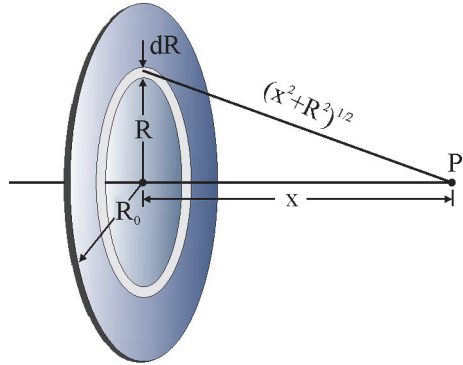
1.8. Τρία σημειακά φορτία είναι τοποθετημένα σε τρεις κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς ℓ , όπως φαίνεται στο σχ.1.31. Να υπολογίσετε την

ένταση και το δυναμικό στην τέταρτη κορυφή.

1.9. Ένας επίπεδος δακτύλιος με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 , σχ.1.32, είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ίση με σ . Ποιό είναι το δυναμικό στα σημεία του άξονα- x του κάθετου στο επίπεδο του δακτυλίου που περνά από το κέντρο του;



Σχήμα 1.32.



Σχήμα 1.33.

1.10. Ένας επίπεδος κυκλικός δίσκος ακτίνας R_0 , σχ.1.33, φέρει μη-ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = aR^2$, όπου R η απόσταση από το κέντρο του δίσκου. Να υπολογίσετε την ένταση $\vec{E}(x)$ και το δυναμικό $V(x)$ στα σημεία του άξονα- x του κάθετου στο επίπεδο του δακτυλίου που περνά από το κέντρο του. Τι διαστάσεις έχει η σταθερά a ;